

ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 26 Απριλίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 63 σχολικού βιβλίου .

Α2. α. $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ β. $\Delta > 0$ και $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ γ. $\Delta = 0$ και $x_1 = x_2 = \frac{-\beta}{2\alpha}$ δ. $\Delta < 0$ ε. $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

Α3. α. Λάθος

β. Λάθος

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ ΒΒ1. Έχουμε: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 4$, $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 3 - 2 = 1$ Από τον τύπο του $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1) \cdot \omega$ βάζοντας όπου $n = 10$ έχουμε:

$$\alpha_{10} = 2 + (10-1) \cdot 1 = 2 + 9 = 11$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ1Α(α)

Από τον τύπο του $S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n)$ βάζοντας όπου $n = 10$ έχουμε:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(\alpha_1 + \alpha_{10}) = 5(2 + 11) = 5 \cdot 13 = 65$$

ή από τον τύπο $S_n = \frac{n}{2}[2\alpha_1 + (n-1)\omega]$ βάζοντας όπου $n = 10$ έχουμε:

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2\alpha_1 + (10-1)\omega] = 5 \cdot [2 \cdot 2 + 9 \cdot 1] = 5 \cdot [4 + 9] = 5 \cdot 13 = 65$$

B2. $-x^2 + \frac{S_{10}}{13}x - (\alpha_{10} - 7) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + \frac{65}{13}x - (11 - 7) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 \geq 0$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 25 - 16 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-5 \pm 3}{-2} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{-5+3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \text{ ή } x_2 = \frac{-5-3}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$-x^2 + 5x - 4$	-	○	+	-

άρα όταν $x \in [1, 4]$ έχουμε $-x^2 + 5x - 4 \geq 0$

B3. $K = |x - 4| + 2 \cdot |x + 1|$

Επειδή $x \in [1, 4]$ έχουμε ότι $1 \leq x \leq 4$

$$1 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 1 - 4 \leq x - 4 \leq 4 - 4 \Leftrightarrow -3 \leq x - 4 \leq 0 \text{ οπότε το } |x - 4| = -x + 4$$

$$1 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 1 + 1 \leq x + 1 \leq 4 + 1 \Leftrightarrow 2 \leq x + 1 \leq 5 \text{ οπότε το } |x + 1| = x + 1$$

$$K = |x - 4| + 2 \cdot |x + 1| = -x + 4 + 2(x + 1) = -x + 4 + 2x + 2 = x + 6$$

B4. $|K| = 7 \Leftrightarrow |x+6| = 7 \Leftrightarrow x+6=7 \text{ ή } x+6=-7 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-13$ που απορρίπτεται επειδή $x \in [1,4]$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.
$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}-1} + \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right) = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \Leftrightarrow$$
$$\alpha = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}^2 - 1^2} + \frac{3}{3} - \sqrt{3} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{3-1} + 1 - \sqrt{3} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{2} + 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow$$
$$\alpha = \sqrt{3} + 1 + 1 - \sqrt{3} = 2.$$

Η συνάρτηση γίνεται: $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x+1}$

Πρέπει $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$, οπότε η f έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{-1\}$

Γ2. $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x+1}$, παραγοντοποιούμε τον αριθμητή:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ ή } x_2 = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2, \text{ οπότε}$$

$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ και ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x+1} = \frac{(x+1)(x+2)}{x+1} = x+2, \quad x \neq -1.$$

Γ3. $f(x) = x+2, \quad x \neq -1.$

Για $x=0$ έχουμε $f(0) = 0+2 = 2$. Άρα τέμνει τον yy' στο σημείο

$A(0,2)$.

Για $f(x) = 0$ έχουμε $0 = x + 2 \Leftrightarrow x = -2$ που είναι δεκτή. Άρα τέμνει τον xx' στο σημείο $B(-2, 0)$.

Γ4. $\beta = 49^{1/2} - \sqrt[3]{23 + \sqrt{f(8) + f(0)} \cdot \sqrt[4]{81}}$

Θα υπολογίσουμε πρώτα τα:

$$f(1) = 1 + 2 = 3, f(8) = 8 + 2 = 10, f(0) = 0 + 2 = 2, \text{ οπότε}$$

$$\beta = \sqrt{49} - \sqrt[3]{23 + \sqrt{10 + 2} \cdot \sqrt[4]{81}} = 7 - \sqrt[3]{23 + \sqrt{10 + 2} \cdot 3} = 7 - \sqrt[3]{23 + \sqrt{10 + 6}} \Leftrightarrow$$

$$\beta = 7 - \sqrt[3]{23 + \sqrt{16}} = 7 - \sqrt[3]{23 + 4} = 7 - \sqrt[3]{27} = 7 - 3 = 4.$$

Γ5. Έστω η ευθεία $y = \kappa \cdot x + \lambda$. Επειδή έχει κλίση το $f(0) = 2$ θα έχουμε $\kappa = 2$ και η ευθεία γίνεται $y = 2 \cdot x + \lambda$.

Επίσης τέμνει τον yy' στο σημείο με τεταγμένη 4, δηλαδή διέρχεται από το σημείο $(0, 4)$. Άρα βάζοντας όπου $x = 0$ και $y = 4$ έχουμε:

$$4 = 2 \cdot 0 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 4. \text{ Άρα η ευθεία είναι η } y = 2x + 4.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) $\Delta = [-(4\lambda + 8)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4\lambda^2 + 12) = (4\lambda + 8)^2 - 4(4\lambda^2 + 12) \Leftrightarrow$

$$\Delta = 16\lambda^2 + 64\lambda + 64 - 16\lambda^2 - 48 = 64\lambda + 16$$

ii) Πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow 64\lambda + 16 > 0 \Leftrightarrow 64\lambda > -16 \Leftrightarrow \lambda > \frac{-16}{64} \Leftrightarrow \lambda > -\frac{1}{4}$

Οπότε έχουμε: $\lambda \in \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

Δ2. i) $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(4\lambda + 8)}{1} = 4\lambda + 8$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4\lambda^2 + 12}{1} = 4\lambda^2 + 12$$

ii) $A = (2x_1 - 3\lambda) \cdot (2x_2 - 3\lambda) - \lambda \cdot (\lambda - 48) \Leftrightarrow$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ1Α(α)

$$A = 4x_1x_2 - 6x_1\lambda - 6x_2\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^2 + 48\lambda \Leftrightarrow$$

$$A = 4 \cdot P - 6\lambda(x_1 + x_2) + 8\lambda^2 + 48\lambda = 4 \cdot P - 6\lambda \cdot S + 8\lambda^2 + 48\lambda \Leftrightarrow$$

$$A = 4 \cdot (4\lambda^2 + 12) - 6\lambda \cdot (4\lambda + 8) + 8\lambda^2 + 48\lambda \Leftrightarrow$$

$$A = 16\lambda^2 + 48 - 24\lambda^2 - 48\lambda + 8\lambda^2 + 48\lambda = 48 \text{ που είναι ανεξάρτητη του } \lambda.$$

Δ3. $|S - P| \leq 4 \Leftrightarrow |4\lambda + 8 - (4\lambda^2 + 12)| \leq 4 \Leftrightarrow |-4\lambda^2 + 4\lambda - 4| \leq 4 \Leftrightarrow$

$$|4\lambda^2 - 4\lambda + 4| \leq 4 \Leftrightarrow |4 \cdot (\lambda^2 - \lambda + 1)| \leq 4 \Leftrightarrow |4| \cdot |\lambda^2 - \lambda + 1| \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot |\lambda^2 - \lambda + 1| \leq 4 \stackrel{4>0}{\Leftrightarrow} |\lambda^2 - \lambda + 1| \leq 1 \quad (2)$$

α' τρόπος:

Θα βρούμε το πρόσημο του $\lambda^2 - \lambda + 1$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0, \text{ οπότε το } \lambda^2 - \lambda + 1 > 0, \text{ για κάθε}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad \text{άρα } |\lambda^2 - \lambda + 1| = \lambda^2 - \lambda + 1$$

$$\text{Η (2) γίνεται } \lambda^2 - \lambda + 1 \leq 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda \leq 0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\lambda^2 - \lambda$	+	○	○	+

Άρα όταν $\lambda \in [0, 1]$ έχουμε $\lambda^2 - \lambda \leq 0$ δεδομένου ότι ικανοποιεί και την

$$\text{προϋπόθεση ότι } \lambda \in \left(-\frac{1}{4}, +\infty \right).$$

β' τρόπος:

$$\text{Η (2) γίνεται: } -1 \leq \lambda^2 - \lambda + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -1 - 1 \leq \lambda^2 - \lambda + 1 - 1 \leq 1 - 1 \Leftrightarrow -2 \leq \lambda^2 - \lambda \leq 0$$

Θα λύσουμε τις ανισώσεις: $-2 \leq \lambda^2 - \lambda$ και $\lambda^2 - \lambda \leq 0$ και θα πάρουμε τις κοινές τους λύσεις.

$$\text{Έχουμε } -2 \leq \lambda^2 - \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda + 2 \geq 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7 < 0$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ1Α(α)

X	$-\infty$	$+\infty$
$\lambda^2 - \lambda + 2$	+	

έχουμε $\lambda \in \mathbb{R}$ για να ισχύει $\lambda^2 - \lambda + 2 \geq 0$.

Έχουμε $\lambda^2 - \lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) \leq 0$

X	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\lambda^2 - \lambda$	+	○	○	+

το $\lambda \in [0, 1]$ για να ισχύει $\lambda^2 - \lambda \leq 0$

Τελικά οι κοινές τους λύσεις δεδομένο ότι πρέπει να ισχύει

και $\lambda \in \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ είναι $\lambda \in [0, 1]$.

Δ4. Πρέπει για να έχει ρίζες αντίστροφες να ισχύει: $\Delta \geq 0$ και $P=1$.

Έχουμε $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$

και $P=1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 12 = 1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 = -11 \Leftrightarrow \lambda^2 = -\frac{11}{4} < 0$, αδύνατη.

Τελικά δεν μπορεί να έχει ρίζες αντίστροφες.